

Cătălin STĂNICĂ
Ion ROȘU

Marius PERIANU
Dumitru SĂVULESCU

Matematică

clasa a V-a

I



CUPRINS

Capitolul 1. Numere naturale

1.1. Scrierea și citirea numerelor naturale	7
1.2. Reprezentarea numerelor naturale pe axa numerelor. Compararea numerelor naturale. Aproximări	12
<i>Teste de evaluare</i>	16
<i>Fișă pentru portofoliul individual</i>	17
1.3. Adunarea numerelor naturale.....	19
1.4. Scăderea numerelor naturale	25
1.5. Înmulțirea numerelor naturale	29
1.6. Factor comun	34
1.7. Ordinea efectuării operațiilor (I)	38
<i>Teste de evaluare</i>	41
<i>Fișă pentru portofoliul individual</i>	43
<i>Test – model pentru Evaluarea Națională</i>	45
1.8. Puterea cu exponent natural a unui număr natural	47
1.9. Compararea puterilor numerelor naturale	51
1.10. Pătrate perfecte. Cuburi perfecte	54
<i>Teste de evaluare</i>	57
<i>Fișă pentru portofoliul individual</i>	59
1.11. Împărțirea cu rest zero a numerelor naturale	61
1.12. Împărțirea cu rest a numerelor naturale	64
<i>Teste de evaluare</i>	69
<i>Fișă pentru portofoliul individual</i>	71
<i>Test – model pentru Evaluarea Națională</i>	73
1.13. Sisteme de numerație (extindere)	75
1.14. Ordinea efectuării operațiilor (II)	78
1.15. Ecuatii și inecuații. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și inecuațiilor	83
<i>Teste de evaluare</i>	88
<i>Fișă pentru portofoliul individual</i>	89
1.16. Divizibilitatea numerelor naturale	91
1.17. Criterii de divizibilitate	96
<i>Teste de evaluare</i>	99
<i>Fișă pentru portofoliul individual</i>	101

1.18. Media aritmetică a două numere naturale	103
1.19. Ecuatii și inecuații în mulțimea numerelor naturale	105
1.20. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și inecuațiilor și probleme de organizare a datelor	109
<i>Teste de evaluare</i>	112
<i>Fișă pentru portofoliul individual</i>	115
<i>Teste – model pentru Evaluarea Națională</i>	117
1.21. Probleme cu caracter aplicativ	122
1.22. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	128

Capitolul 2. Mulțimi

2.1. Mulțimi	135
2.2. Relații între mulțimi. Submulțimi	140
<i>Teste de evaluare</i>	143
<i>Fișă pentru portofoliul individual</i>	145
2.3. Operații cu mulțimi	147
2.4. Mulțimi finite și mulțimi infinite. Mulțimea divizorilor și mulțimea multiplilor unui număr natural	152
<i>Teste de evaluare</i>	155
<i>Fișă pentru portofoliul individual</i>	157
<i>Test – model pentru Evaluarea Națională</i>	159
2.5. Probleme cu caracter aplicativ	162
2.6. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	164

Capitolul 3. Variante de subiecte pentru teză

171

Soluții

179

NUMERE NATURALE

Tema 1.1. Scrierea și citirea numerelor naturale

Tema 1.2. Reprezentarea pe axa numerelor.

Compararea numerelor naturale. Aproximări

Teste de evaluare. Fișă pentru portofoliul individual

Tema 1.3. Adunarea numerelor naturale

Tema 1.4. Scăderea numerelor naturale

Tema 1.5. Înmulțirea numerelor naturale

Tema 1.6. Factor comun

Tema 1.7. Ordinea efectuării operațiilor (I)

Teste de evaluare. Fișă pentru portofoliul individual

Test – model pentru Evaluarea Națională

Tema 1.8. Puterea cu exponent natural a unui număr natural

Tema 1.9. Compararea puterilor numerelor naturale

Tema 1.10. Pătrate perfecte. Cuburi perfecte

Teste de evaluare. Fișă pentru portofoliul individual

Tema 1.11. Împărțirea cu rest zero a numerelor naturale

Tema 1.12. Împărțirea cu rest a numerelor naturale

Teste de evaluare. Fișă pentru portofoliul individual

Test – model pentru Evaluarea Națională

Tema 1.13. Sisteme de numerație (extindere)

Tema 1.14. Ordinea efectuării operațiilor (II)

Tema 1.15. Ecuații și inecuații.

Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și inecuațiilor

Teste de evaluare. Fișă pentru portofoliul individual

Tema 1.16. Divizibilitatea numerelor naturale

Tema 1.17. Criterii de divizibilitate

Teste de evaluare. Fișă pentru portofoliul individual

Tema 1.18. Media aritmetică a două numere naturale

Tema 1.19. Ecuații și inecuații în mulțimea numerelor naturale

Tema 1.20. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și inecuațiilor.

Probleme de organizare a datelor

Teste de evaluare. Fișă pentru portofoliul individual

Teste – model pentru Evaluarea Națională

Tema 1.21. Probleme cu caracter aplicativ

Tema 1.22. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

Scrierea și citirea numerelor naturale

Scrierea. Pentru scrierea unui număr natural, se folosesc unul sau mai multe din următoarele zece simboluri, numite *cifre arabe*:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fiecare număr se scrie ca o succesiune de cifre, care se pot repeta, prima cifră a unui număr natural de cel puțin două cifre fiind diferită de 0. De asemenea, fiecare succesiune de cifre reprezintă un număr. Acest mod de scriere a unui număr natural se numește *sistem zecimal*, sau *în baza zece*, pentru că zece unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat mai mare.

Citirea. Pentru a citi un număr natural, grupăm cifrele câte trei de la dreapta spre stânga. Aceste grupe se numesc clase. Fiecare clasă se compune din unități, zeci și sute. În ordine de la dreapta la stânga avem: clasa unităților, clasa miilor, clasa milioaneilor, clasa miliardelor etc. Din acest motiv, scrierea numerelor în baza zece este o scriere *pozițională*, deoarece fiecare cifră are o anumită valoare după locul unde este scrisă.

Exemplu. În numărul 23 472 508 216, cifra 2 apare de trei ori, de la dreapta spre stânga și ea are următoarele valori: sute, milioane și respectiv zeci de miliarde.

sute de miliarde	2	3	4	7	2	5	8	8	2	1	6
zeci de miliarde	clasa			clasa			clasa			clasa	
miliarde	miliarde			milioanelor			miilor			unităților	
sute de milioane											
zeci de milioane											
milioane											
sute de mii											
zeci de mii											
mii											
sute											
zeci											
unități											

Descompunerea zecimală. Orice număr natural de două sau mai multe cifre se scrie în mod unic sub forma unei sume de produse între fiecare cifră din scrierea numărului și numărul ce indică ordinul cifrei respective (1, 10, 100, 1000 etc.).

Example. 1. $37 = 3 \cdot 10 + 7$;

$$\overline{ab} = 10 \cdot a + b;$$

$$2. 275 = 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5;$$

$$\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c;$$

3. $8086 = 8 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 6;$

$$\overline{abcd} = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d.$$

Cifre romane. Pentru scrierea numerelor naturale, romanii foloseau semnele:

I (1) V (5) X (10) L (50) C (100) D (500) M (1000)

numite cifre romane, valoarea corespunzătoare fiecăreia fiind cea scrisă în paranteză.

Sistemul de scriere folosit de romani nu este nici zecimal, nici pozițional. La scrierea numerelor cu ajutorul cifrelor romane se ține cont de următoarele reguli:

a. o cifră cu valoarea mai mică, scrisă la dreapta uneia cu o valoare mai mare indică o sumă: $XV = 10 + 5$, $VIII = 5 + 1 + 1 + 1$, $MC = 1000 + 100$;

b. o cifră cu valoare mai mică, scrisă la stânga uneia cu valoare mai mare indică o scădere (nu se poate scădea mai mult de o cifră!): IX = 10 – 1, CM = 1000 – 100;

- c. cifrele I, X, C, M se pot scrie consecutiv de cel mult trei ori, iar cifrele V, L, D nu se pot repeta consecutiv și nici nu se pot scădea.
- d. o cifră sau un grup de cifre se multiplică de 1000 de ori trasând o linie deasupra cifrei sau grupului respectiv: $\overline{X} = 10\,000$, $\overline{XC} = 90\,000$, $\overline{MIC} = 1099\,000$ etc.

Observație. Determinarea numărului de numere naturale n cuprinse între două numere naturale a și b date:

- de la 1 la n sunt n numere naturale, iar de la 0 la n sunt $n + 1$ numere naturale;
- în general, de la a la b (incluzându-le pe a și b) sunt $b - a + 1$ numere naturale.



1. Citiți numerele:

- | | | |
|--------------|---------------|--------------|
| a) 84305027; | b) 5000002; | c) 205017; |
| d) IL; | e) MCMLXXXIX; | f) CMMXVIII; |
| g) 111111; | h) 211005; | i) 67403067. |

Rezolvare. a) Grupăm numărul în grupe de câte trei cifre de la dreapta spre stânga 84 305 027 și citim *optzeci și patru de milioane trei sute cinci mii douăzeci și șapte*;
d) $L - I = 50 - 10 = 49$, deci patruzeci și nouă.

2. Citiți numerele:

- | | | |
|---------------|------------|---------------|
| a) 123000456; | b) 985420; | c) 203005023; |
| d) 987654321; | e) 100005; | f) 403067; |
| g) 98700654; | h) 120; | i) 202022. |

3. Scrieți în baza zece, numerele:

- | | | |
|-----------------------|--------------------------------|-------------------------|
| a) douăzeci și șapte; | b) trei sute cincizeci și opt; | c) două mii trei; |
| d) cinci mii opt; | e) nouă mii șapte sute cinci; | f) trei milioane cinci; |
| g) trei mii; | h) trei mii două sute trei; | i) două sute șase. |

4. Scrieți în baza zece, numerele:

- a) două milioane opt sute treizeci și șapte de mii doi;
b) șapte milioane trei mii șase sute cinci;
c) treizeci și șapte de milioane optzeci de mii șase;
d) patruzeci și trei de mii opt sute unu.

5. Scrieți în baza zece, numerele:

- | | |
|--|--|
| a) șapte mii nouă sute optzeci și doi; | b) cinci mii douăzeci și șapte; |
| c) trei milioane nouă mii unsprezece; | d) patru sute de mii douăzeci și trei. |

6. a) Scrieți cu cifre romane numerele: 5, 11, 26, 111, 1257.

b) Scrieți cu cifre arabe numerele: X, MCCL, XL, MXMLXXXIX, MMIII.

7. a) Scrieți cu cifre romane numerele: 8, 49, 94, 307, 1457, 1514, 1948, 2003.

b) Scrieți cu cifre arabe numerele: XIV, XLIV, LXIV, MCMXIV, MMXIV.

8. a) Scrieți patru numere impare cu suma cifrelor 3.

b) Scrieți trei numere impare cu produsul cifrelor 6.

c) Scrieți patru numere pare cu suma cifrelor 10.

9. Dați trei exemple de numere naturale de forma $\overline{abcdcba}$ și apoi citiți-le.
10. Câte numere cuprinse între 30 și 60 conțin:
 a) cifra 4; b) două cifre identice; c) cifrele 1 sau 8?
11. Câte cifre se folosesc pentru a scrie toate numerele naturale până la 20 inclusiv?
12. Câte cifre se folosesc, în total, pentru a scrie toate numerele de la 1 la 35, inclusiv 1 și 35?
13. De câte ori se utilizează cifra 5 pentru a scrie toate numerele naturale de 3 cifre?



14. a) Scrieți 4 numere pare, având suma cifrelor 3.
 b) Scrieți 4 numere impare de două cifre, având diferența cifrelor egală cu 1.
15. Câte numere naturale, cuprinse între 500 și 550, conțin:
 a) cifra 3; b) două cifre identice; c) cifrele 0 și 7?
- Rezolvare.** a) Numerele care conțin cifra 3 sunt: 503, 513, 523, 543 și 530, 531, 532, ..., 539. În total sunt 14 numere.
16. a) Determinați numerele de forma $\overline{abc}$ știind că $\overline{abc} = 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 9$.
 b) Determinați cifrele a, b, c știind că $789 = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$.
 c) Determinați cifrele a, b, c, d știind că $\overline{a3c4} = 5 \cdot 1000 + b \cdot 100 + 7 \cdot 10 + d$.
17. a) Determinați numerele de forma $\overline{a2b5}$ știind că produsul cifrelor sale este 120.
 b) Determinați numerele de forma $\overline{11a3b7}$ știind că suma cifrelor sale este 17.
18. a) Aflați numerele naturale $\overline{ab}$ pentru care $\overline{a2b} = \overline{2ba}$.
 b) Aflați numerele naturale $\overline{abc}$ pentru care $\overline{a4bc} = \overline{cbaa}$.
 c) Câte numere naturale $\overline{abcd}$ verifică egalitatea $\overline{a7bd} = \overline{cadb}$?
19. a) Câte numere naturale sunt de la 1 la 34? Dar de la 0 la 25? Dar de la 7 la 28?
 b) Câte numere naturale sunt de la 1 la 9? Dar de la 11 la 75? Dar de la 111 la 211?

Rezolvare. a) De la 1 până la 34 sunt 34 numere naturale. De la 0 până la 25 sunt $25 - 0 + 1 = 26$ numere naturale. De la 7 până la 28 sunt $28 - 7 + 1 = 22$ numere naturale.

20. a) Câte numere pare și câte impare sunt de la 127 până la 579?
 b) Determinați câte numere pare sunt de la 444 până la 2012.
 c) Pe ecranul calculatorului sunt scrise toate numerele de la 600 la 2013. Alin utilizează un program care șterge de pe ecran numerele pare. Câte numere rămân pe ecran?

Rezolvare. a) Vom utiliza un **contor** de numărare. Numerele impare de la 127 până la 579 se pot scrie astfel: $127 = 2 \cdot 63 + 1$, $129 = 2 \cdot 64 + 1$, $131 = 2 \cdot 65 + 1$, ..., $577 = 2 \cdot 287 + 1$, $579 = 2 \cdot 289 + 1$, adică sub forma $2k + 1$, unde k (pe care îl vom numi **contor**) ia valori consecutive de la 63 la 289.

Problema se reduce la aflarea numărului de valori pe care le ia contorul, deci trebuie să găsim câte numere naturale sunt de la 63 până la 289, adică $289 - 63 + 1 = 227$ numere.

În același fel, numerele pare cuprinse între 127 și 579 sunt $128 = 2 \cdot 64$, $130 = 2 \cdot 65$, ..., $578 = 2 \cdot 289$, deci contorul ia valori de la 64 la 289. Ca urmare, între 127 și 579 sunt $289 - 64 + 1 = 226$ numere naturale pare.

Metoda contorului de numărare poate fi utilizată, în general, pentru determinarea numărului de termeni ai unei secvențe de numere naturale care se obțin numărând din r în r începând de la primul termen al secvenței, unde r este un număr natural nenul dat. O astfel de secvență se numește progresie aritmetică, iar r se numește rația progresiei.

- 21. a)** Scrieți primele 12 numere din șirul numerelor naturale.
b) Care este al 57-lea număr natural din șirul numerelor naturale nenule?
c) Care este al 33-lea număr par din șirul numerelor naturale?
- 22. Aflați câte numere se găsesc în fiecare dintre secvențele:**
a) 1, 2, 3, ..., 30; **b)** 10, 11, 12, ..., 30; **c)** 2, 4, 6, 8, ..., 200;
d) 0, 1, 2, 3, ..., 19; **e)** 17, 18, 19, ..., 156; **f)** 11, 13, 15, 17, ..., 137;
g) 15, 20, 25, ..., 125; **h)** 9, 12, 15, ..., 249; **i)** 6, 12, 18, ..., 660.
- 23. a)** Care este al 37-lea număr natural par din șirul numerelor naturale?
b) Care este al 138-lea număr natural impar din șirul numerelor naturale?
- Rezolvare.** Cum șirul numerelor naturale este 0, 1, 2, ..., n , ... numerele pare fiind de forma $2 \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$, obținem că $2 \cdot 36 = 72$ este al 37-lea număr par.
- 24. a)** Câte numere impare se găsesc în șirul: 5, 6, 7, 8, ..., 20?
b) Câte numere pare se găsesc în șirul: 2, 4, 6, 8, ..., 80?
- 25. Pentru fiecare din șirurile de mai jos observați regula de alcătuire și scrieți încă trei numere:**
a) 10, 16, 22, ..., ..., ... **b)** 10, 21, 32, ..., ..., ... **c)** 2, 6, 18, ..., ..., ...
d) 5, 11, 23, ..., ..., ... **e)** 4, 11, 32, ..., ..., ... **f)** 12, 23, 34, ..., ..., ...
- 26. a)** Câte numere de două cifre există? Câte numere impare de trei cifre există?
b) Aflați câte numere de două cifre distincte există.
c) Determinați numărul de numere pare de forma $\overline{ab5c}$.
d) Determinați câte numere pare sunt de forma $\overline{2ab6c}$.

Rezolvare. a) Prima cifră a unui număr de două cifre $\overline{ab}$ poate fi oricare cifră de la 1 până la 9, adică se poate alege în 9 moduri. Pentru a doua cifră sunt 10 posibilități de alegere, adică oricare dintre cifrele de la 0 până la 9. Pentru fiecare cifră a putem scrie oricare din cele 10 cifre b , deci vor fi $9 \cdot 10 = 90$ numere naturale diferite.

Dacă $\overline{abc}$ este un număr impar, atunci cifra a poate lua 9 valori, cifra b 10 valori, iar cifra c 5 valori (1, 3, 5, 7 sau 9), deci sunt $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ numere impare de trei cifre.

Metoda folosită mai sus se numește:

Regula produsului. Dacă un cuvânt este format din n litere și dacă pentru litera de pe locul k (unde $k = 1, 2, \dots, n$) există a_k posibilități de alegere, independente de alegerile literelor anterioare, atunci numărul cuvintelor formate din n litere este egal cu $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$.

- 27. Utilizând eventual regula produsului, determinați:**
a) câte numere de două cifre se pot forma, folosind numai cifrele 5 și 7;
b) câte numere de trei cifre se pot forma, folosind numai cifrele 2, 3 și 4;
c) câte numere impare de patru cifre se pot forma cu numerele 1, 2, 3 și 4.
- 28. a)** Câte numere naturale de patru cifre se pot forma cu cifrele 2, 5 și 8?

b) Câte numere naturale de patru cifre se pot forma cu cifrele 0, 2, 7?

29. Determinați:

a) Câte numere naturale de 6 cifre încep cu 123?

b) Câte numere naturale de 6 cifre se termină cu 123?

c) Câte numere naturale de 6 cifre conțin secvența de cifre 123?

d) Câte numere naturale de 6 cifre distincte se termină cu 123?

30. a) Câte cifre s-au folosit pentru numerotarea unei cărți cu 100 de pagini?

b) Pentru numerotarea paginilor unei culegeri de matematică s-au folosit 450 cifre. Câte pagini are culegera?

31. a) Câte cifre s-au folosit pentru numerotarea unei cărți cu 1024 de pagini?

b) Pentru numerotarea paginilor unei enciclopedii s-au utilizat 3389 cifre. Câte pagini are enciclopedia?



32. a) Câte numere impare se găsesc în șirul: 17, 18, 19, ..., 173?

b) Câte numere pare se găsesc în șirul: 3, 6, 9, 12, 15, 18, ..., 300?

c) Câte numere conține următorul șir: 11, 16, 21, ..., 2011?

33. a) Câte numere naturale de forma $\overline{aba}$ cu $a \neq 0$ și $a \neq b$ există?

b) Câte numere naturale au forma $\overline{abcabc}$, cu $a \neq 0$ și $a \neq b \neq c \neq a$?

c) Câte numere naturale sunt de forma $\overline{abc}$, cu $a \neq 0$ și $a < b < c$?

34. a) Câte numere naturale au forma $\overline{abcd}$, cu $a \neq 0$ și $a > b > c > d$?

b) Câte numere naturale impare sunt de forma $\overline{abcd}$ cu $a \neq 0$ și $a > b > c > d$?

c) Câte numere naturale sunt de forma $\overline{abc}$ și au produsul cifrelor număr impar?

35. a) Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, știind că $a + c = 3$.

b) Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, știind că $a + c = 6 \cdot b$.

36. Aflați numărul perechilor de numere naturale consecutive de forma $\overline{ab3}$, $\overline{ca4}$.

Probleme de șapte stele

37. Se construiește numărul natural 35355355535555... după regula: după primul trei un cinci, după al doilea trei doi de cinci, după al treilea trei se scriu trei de cinci ș.a.m.d.

a) Care este cifra de pe poziția 21?

b) A câta cifră a numărului va fi a zecea cifră de 3?

38. Determinați al 13-lea număr din șirul de numere: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

39. Aflați câte numere au în comun șirurile 10, 15, 20, ..., 2010 și 10, 14, 18, ..., 2010.

Testul 1

- (1p) 1. Scrieți cu cifre următoarele numere naturale:
 a) trei sute douăzeci și șapte; b) o mie trei;
 c) un milion trei sute patruzeci și șapte de mii două sute patru;
 d) trei miliarde douăzeci de milioane patru sute de mii cinci.
- (1p) 2. Scrieți în cuvinte numerele naturale: a) 1205; b) 10 006; c) 207 405.
- (3p) 3. a) Scrieți cel mai mic număr format din patru cifre distincte, cu cifra sutelor 4.
 b) Determinați cel mai mare număr natural format din 5 cifre distincte.
 c) Determinați cel mai mic și cel mai mare număr natural de 6 cifre diferite, știind că suma acestor cifre este 17.
- (2p) 4. Ce număr urmează în fiecare din următoarele secvențe:
 a) $2 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 14 \rightarrow \dots$?
 b) $132 \rightarrow 374 \rightarrow 5116 \rightarrow \dots$?
- (1p) 5. Aflați câte numere de trei cifre au exact două cifre identice.
- (1p) 6. Suma cifrelor numărului $\overline{abc}$ este 25. Calculați suma cifrelor numărului $\overline{abc} + 1$.

NOTĂ. Timp de lucru 50 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

- (2p) 1. a) Scrieți în ordine descrescătoare numerele 5678, 5876, 5768 și 5687.
 b) Aflați cel mai mare număr natural de 5 cifre diferite, cu produsul cifrelor 0.
- (1p) 2. Dacă $237 = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$, atunci aflați valoarea produsului $a \cdot b \cdot c$.
- (1p) 3. Determinați câte numere naturale de forma $\overline{abc}$ verifică relația $\overline{abc} = \overline{cba}$.
- (2p) 4. Câte numere pare de patru cifre sunt mai mari decât 8345?
- (2p) 5. Pe axa numerelor se consideră punctele A și B de coordonate 3 și 14.
 a) Aflați coordonatele punctelor M , N , P situate între A și B astfel încât $AM = 2$, $NB = 6$ și $PB = 1$.
 b) Determinați lungimile segmentelor OM , AN , PA și MP .
- (1p) 6. Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ care verifică relația $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$.

NOTĂ. Timp de lucru 50 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.